Tranformasi Geometri

A. PENDAHULUAN

- **Transformasi geometri** adalah proses pemindahan atau pembentukan hasil atau bayangan dari suatu titik atau kurva.

B. JENIS-JENIS TRANSFORMASI GEOMETRI

- **Jenis-jenis transformasi geometri** terdiri dari translasi (pergeseran), transformasi bersesuaian matriks, refleksi (pencerminan), rotasi (perputaran), dan dilatasi (perkalian).

Jenis	Keterangan	Persamaan	Matriks	Hasil Bayangan
Translasi (T)				
pergeseran searah sumbu x sejauh a dan searah sumbu y sejauh b.		$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$	$x' = a + x$ $y' = b + x$
Transformasi bersesuaian matriks (M)				
transformasi oleh matriks berordo 2 x 2.		$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$	$x' = ax + by$ $y' = cx + dy$
Refleksi				
a. **Sumbu x (y = 0)**	pencerminan dengan cermin berupa suatu sumbu, garis atau titik.	$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$x' = x$ $y' = -y$
b. **Garis y = b**		$\begin{pmatrix}x'\\y'-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y-b\end{pmatrix}$		$x' = x$ $y' = 2b - y$
c. **Sumbu y (x = 0)**		$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$x' = -x$ $y' = y$
d. **Garis x = a**		$\begin{pmatrix}x'-a\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-a\\y\end{pmatrix}$		$x' = 2a - x$ $y' = y$
e. **Garis y = x**		$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$x' = y$ $y' = x$
f. **Garis y = –x**		$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$	$x' = -y$ $y' = -x$
g. **Titik O (0,0)**		$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$x' = -x$ $y' = -y$
h. **Titik P (a,b)**		$\begin{pmatrix}x'-a\\y'-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix}$		$x' = 2a - x$ $y' = 2b - y$
i. **Garis y = mx**		$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}1-m^2&2m\\2m&-(1-m^2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{1-m^2}{1+m^2}&\frac{2m}{1+m^2}\\\frac{2m}{1+m^2}&\frac{-(1-m^2)}{1+m^2}\end{pmatrix}$	$x' = \frac{x + 2my - m^2x}{1+m^2}$ $y' = \frac{-y + 2mx + m^2y}{1+m^2}$
j. **Garis y = mx + n**		$\begin{pmatrix}x'\\y'-n\end{pmatrix}=\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}1-m^2&2m\\2m&-(1-m^2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y-n\end{pmatrix}$		...
Rotasi (R)				
a. **Pusat O(0,0) sejauh α**	perputaran terhadap suatu pusat dengan sudut tertentu. -α jika searah jarum jam, +α jika berlawanan.	$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}$	$x' = x.\cos\alpha - y.\sin\alpha$ $y' = x.\sin\alpha + y.\cos\alpha$
b. **Pusat P(a,b) sejauh α**		$\begin{pmatrix}x'-a\\y'-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix}$		...
Dilatasi (D)				
a. **Pusat O(0,0), faktor skala k**	perkalian dari suatu pusat dengan faktor skala k. k > 0 dilatasi searah, k < 0 dilatasi berlawanan arah.	$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k&0\\0&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}k&0\\0&k\end{pmatrix}$	$x' = kx$ $y' = ky$
b. **Pusat P(a,b), faktor skala k**		$\begin{pmatrix}x'-a\\y'-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k&0\\0&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix}$		$x' = k(x - a) + a$ $y' = k(y - b) + b$

C. BAYANGAN TITIK, KURVA DAN BANGUN DATAR

- **Bayangan titik** dapat ditentukan menggunakan persamaan-persamaan transformasi.

Contoh 1:

Tentukan bayangan titik B(2, -1) oleh transformasi:

a. T(4,5)

$x' = 2 + 4 = 6$ B′(6,4)

$y' = -1 + 5 = 4$

b. Transformasi bersesuaian matriks $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

$x' = (2).2 + (0).(-1) = 4$ B′(4, -7)

$y' = (-1).2 + (5).(-1) = -7$

c. Refleksi terhadap sumbu x

$x' = 2$ B′(2, 1)

$y' = -(-1) = 1$

d. Refleksi terhadap sumbu y

$x' = -2$ B′(-2, -1)

$y' = -1$

e. Refleksi terhadap titik P (4,5)

$x' = 2(4) - 2 = 6$ B′(6, 11)

$y' = 2(5) -(-1) = 11$

f. Refleksi terhadap garis y = 3x

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{1+(3)^2}.\begin{pmatrix} 1-(3)^2 & 2.3 \\ 2.3 & -(1-(3)^2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{10}.\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x' = \frac{(-8).2 + 6.(-1)}{10} = -2{,}2$$ B′(-2,2, 0,4)

$$y' = \frac{(6).2 + 8.(-1)}{10} = 0{,}4$$

g. Refleksi terhadap garis y = 3x + 1

$$\begin{pmatrix} x' \\ y'-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+(3)^2}.\begin{pmatrix} 1-(3)^2 & 2.3 \\ 2.3 & -(1-(3)^2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y'-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}.\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$x' = \frac{(-8).2 + 6.(-2)}{10} = -2{,}8$$

$$y' - 1 = \frac{(6).2 + 8.(-2)}{10} = -0{,}4 + 1 = 0{,}6$$

B′(-2,8, 0,6)

Contoh 2:

Tentukan bayangan titik C(2, -4) yang diputar 30° searah jarum terhadap titik O.

Jawab:

$x' = 2.\cos(-30) - (-4).\sin(-30) = 2.\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - 4.\tfrac{1}{2} = \sqrt{3} - 2$

$y' = 2.\sin(-30) + (-4).\cos(-30) = -2.\tfrac{1}{2} - 4.\tfrac{1}{2}\sqrt{3} = -1 - 2\sqrt{3}$

C′($\sqrt{3} - 2$, $-1 - 2\sqrt{3}$)

Contoh 3:

Tentukan titik Q jika Q′(8, -2) terjadi karena dilatasi pusat R(2,-1) dan faktor skala 2.

Jawab:

Gunakan invers matriks,

$$\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-(2) \\ y-(-1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2(2) - 0(0)}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$x - 2 = 4$ $x = 6$ Q(6, -2)

$y + 1 = -1$ $y = -2$

- **Bayangan kurva** dapat ditentukan dengan memasukkan nilai x′ dan y′ ke dalam persamaan kurva y = f(x) sehingga menjadi y′ = f(x′).

Translasi

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Transformasi geometri selain translasi

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

- **Persamaan bayangan kurva** tidak perlu diberi tanda aksen pada x dan y nya.

Contoh 1:

Tentukan y = f(x′) dari parabola $y = x^2 - 2x + 3$ oleh refleksi terhadap garis x = 2!

Jawab:

x′ = 2(2) – x, sehingga x = 4 – x′

y′ = y, sehingga y = y′

$(y') = (4 - x')^2 - 2(4 - x') + 3$

$y' = 16 - 8x' + x'^2 - 8 + 2x' + 3$ (hilangkan aksen)

$y = x^2 - 6x + 11$

Contoh 2:

Tentukan bayangan dari garis 2x + 4y – 3 = 0 oleh transformasi yang bersesuaian dengan $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$!

Jawab:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{(1)(6) - (-4)(-1)}.\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

x = 3x′ + 2y′

$y = \tfrac{1}{2}x' + \tfrac{1}{2}y'$

$2(3x' + 2y') + 4(\tfrac{1}{2}x' + \tfrac{1}{2}y') - 3 = 0$

6x′ + 4y′ + 2x′ + 2y′ – 3 = 0 (hilangkan aksen)

8x + 6y – 3 = 0

Contoh 3:

Tentukan bayangan persamaan $4x^2 + 4y^2 - 3 = 0$ oleh dilatasi dengan pusat X(1,2) dan faktor skala 2!

Jawab:

$x' = 2(x - 1) + 1$ $\qquad$ $y' = 2(y - 2) + 2$

$x' = 2x - 2 + 1$ $\qquad$ $y' = 2y - 4 + 2$

$x = \frac{x'+1}{2}$ $\qquad$ $y = \frac{y'+2}{2}$

$4(\frac{x'+1}{2})^2 + 4(\frac{y'+2}{2})^2 - 3 = 0$

$x'^2 + 2x' + 1 + y'^2 + 4y' + 4 - 3 = 0$ (hilangkan aksen)

$\underline{x^2 + y^2 + 2x + 4y + 2 = 0}$

- **Bayangan bangun datar** dapat ditentukan dengan mentransformasikan titik-titiknya menjadi bayangannya, sehingga terbentuk bangun bayangan.
- **Luas bangun datar bayangan** berubah jika mengalami dilatasi dan transformasi bersesuaian matriks, namun tetap sebangun.
- **Luas bangun datar bayangan** dapat ditentukan:

Dilatasi

$$\mathbf{L' = k^2 + L}$$

k = faktor skala

Transformasi bersesuaian matriks

$$\mathbf{L' = |M|.\ L}$$

|M| = determinan matriks bersesuaian

D. KOMPOSISI TRANSFORMASI GEOMETRI

- **Komposisi transformasi** (o) adalah kejadian dimana suatu titik atau kurva P mengalami transformasi A sehingga menghasilkan P′, dan dilanjutkan oleh transformasi B sehingga menghasilkan P″.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "A"] \arrow[rr, bend right, "B \circ A"'] & P' \arrow[r, "B"] & P'' \end{tikzcd}$$

- **Penulisan komposisi transformasi:**

  B∘A, dibaca transformasi A dilanjutkan transformasi B.
- **Bayangan akhir** dicari dengan mentransformasikan titik atau kurva secara bertahap, atau dengan komposisi transformasi istimewa.
- **Komposisi transformasi** istimewa:

1) **Translasi** ($T_2 \circ T_1$)

   Matriks bersesuaian untuk komposisi translasi 1 dilanjutkan translasi 2:

$$\mathbf{T_2 \circ T_1 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+a \\ d+b \end{pmatrix}}$$

2) **Transformasi** ($M_2 \circ M_1$)

   Matriks bersesuaian untuk komposisi transformasi bersesuaian matriks 1 dilanjutkan transformasi bersesuaian matriks 2:

$$\mathbf{M_2 \circ M_1 = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$$

3) **Refleksi** ($Rf_2 \circ Rf_1$)

Komposisi refleksi	Hasil bayangan
Terhadap garis x = a dilanjutkan garis x = b	$x' = 2(b - a) + x$ $y' = y$
Terhadap garis y = a dilanjutkan garis y = b	$x' = x$ $y' = 2(b - a) + y$
Terhadap garis yang tegak lurus	rotasi pada perpotongan garis sejauh 180°
Terhadap garis yang berpotongan ($m_1 = \tan\alpha$, $m_2 = \tan\beta$)	rotasi pada perpotongan garis sejauh $2(\beta - \alpha)$

4) **Rotasi** ($R_2 \circ R_1$)

   Rotasi 1 pada pusat P sejauh α dilanjutkan rotasi 2 pada **pusat P** sejauh β adalah rotasi dengan pusat P sejauh **(α + β).**

Contoh:

Tentukan bayangan garis $10x - 5y + 3 = 0$ oleh transformasi yang bersesuaian dengan $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ dilanjutkan $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$!

Jawab:

$M_2 \circ M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{(-3)(1) - (2)(-4)} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$x = \frac{1}{5}(-3x' + 2y')$

$y = \frac{1}{5}(-4x' + y')$

$10.(\frac{1}{5}(-3x' + 2y')) - 5.(\frac{1}{5}(-4x' + y')) + 3 = 0$

$2(-3x' + 2y') - (-4x' + y') + 3 = 0$

$-6x' + 4y' + 4x' - y' + 3 = 0$ (hilangkan aksen)

$\underline{3y - 2x + 3 = 0}$